УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТИХ ТІЛАХ

[1]Козуб Г.О., [1]Козуб Ю.Г.

[1]Луганський національний університет імені Тараса Шевченка

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТЫХ ТЕЛАХ

[1]Козуб Г.А., [1]Козуб Ю.Г.

[1]Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко

MODELING OF THERMAL PROCESSES IN LAYERED BODIES

[1]Kozub H.O., [1]Kozub Yu.H.

[1]Luhansk Taras Shevchenko National University

Анотація. Наведено загальну процедуру дослідження теплових процесів у шаруватих конструкціях з урахуванням усіх можливих граничних умов підведення тепла. Побудовано модифіковану скінченно-елементну модель поширення тепла у шаруватому твердому тілі з урахуванням анізотропії властивостей композитного матеріалу. На основі гіпотези про нерозривність полів температур та теплових потоків на границі шарів конструкції побудовано розв'язувальні рівняння методу скінченних елементів. Для зниження розмірності задачі теплопровідності шаруватих конструкцій використовується суперелементний підхід. Для пакету шарів розв'язувальні рівняння побудовано за допомогою процедури конденсації системи рівнянь сукупності скінченних елементів, що входять до пакету. На першому етапі розв'язується задача визначення розподілу температури по поверхні пакету шарів. На наступному етапі визначається температура у внутрішніх вузлах пакету. Запропонований підхід є універсальним і має низку особливостей, серед яких можна виділити наступне: порядок розв'язувальних рівнянь для пакету визначається лише кількістю зовнішніх вузлів і не залежить від структури пакету шарів. Теплофізичні характеристики шарів задаються у кожному елементі пакету в системі координат анізотропії і визначають особливості матриці теплопровідності всього пакету. Такий підхід на відміну від інших методик дозволяє враховувати вплив теплофізичних характеристик на розподіл температури поля по товщині пакету, має зручну для реалізації форму подання розв'язувальних рівнянь на основі МСЕ в тривимірній постановці. Застосування запропонованої методики дозволяє вирішувати задачі теплопровідності для шаруватих анізотропних конструкцій будь якої форми. При цьому можна уникнути використання спрощених двовимірних постановок задачі, які призводять до доволі суттєвих обмежень і похибок, зокрема пов'язаних із урахуванням граничних умов. На основі запропонованого підходу отримано розв'язки задач теплопровідності шаруватих анізотропних тіл. Результати задовільно збігаються з експериментальними даними і розв'язками інших авторів, що свідчить про достовірність методики.

Ключові слова: метод скінченних елементів, теплопровідність, багатошаровий елемент конструкції, суперелемент

Вступ. На теперішній час для ефективного пошуку розв'язування задач теплопровідності потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила й границі їх застосування. До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд нестаціонарних навантажень різного рівня інтенсивності, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж достовірного використання того чи іншого алгоритму. Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач теплопровідності є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі, особливістю яких в даній роботі є їх розвиток в рамках методу скінченних елементів (МСЕ).

Використання чисельних методів відкриває великі можливості для реалізації прикладних моделей розрахунку неоднорідних оболонок і пластин на теплові впливи. Такий підхід засновано на зведенні тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної за допомогою, будь-яких гіпотез про розподіл температури по товщині пакету шарів з подальшою реалізацією двовимірної моделі методом скінченних елементів (СЕ). Таку методику було використано авторами робіт [8] при вирішенні задач теплопровідності для ортотропних та анізотропних шаруватих оболонок та пластин. Проте застосування такого підходу обмежується елементами конструкцій простої форми [2, 9]. Існують також підходи, засновані на синтезі МСЕ і методу інтегральних перетворень [10].

Стосовно до розрахунку шаруватих конструкцій методом скінченних елементів доцільна розробка чисельних методів з доведенням їх до програмного забезпечення, орієнтованого на широке використання в практиці проектування, хоча наявність шаруватої структури, відмінність теплофізичних характеристик вносить значні труднощі при розв'язанні задач теплопровідності.

Мета дослідження - побудова уточненої скінченно-елементної моделі розподілу температурного поля по товщині шаруватого анізотропного композитного тіла.

Розглянемо застосування тривимірних скінченних елементів в задачах теплопровідності для шаруватих анізотропних конструкцій.

Для скінченно-елементного формулювання задачі теплопровідності для просторових конструкцій з анізотропних матеріалів, що мають складну геометричну форму, використовується базисна $z^i\left(z^1, z^2, z^3\right)$ і місцева $\xi^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ ортогональні системи координат, зв'язані зі скінченнім елементом [2]. Між базисними і місцевими координатами СЕ прийнято відображення [8]:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} N^k\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right) z_i^k, \tag{1}$$

де k – номер вузла СЕ.

Для побудови матриці теплопровідності вихідне співвідношення опишемо у вигляді варіаційного рівняння Лагранжа при розгляді стаціонарної задачі теплопровідності [7]:

$$\delta W = \int_V \left(w_o \delta T + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial \xi^i} \frac{\partial \delta T}{\partial \xi^j} \right) dv + \int_{S_1} q \delta T ds \int_{S_2} h(T-\theta) \delta T ds = 0, \tag{2}$$

де w_o – потужність джерела теплоутворення;

θ – температура навколишнього середовища;

λ_{ij} – тензор теплопровідності;

q – тепловий потік;

h – коефіцієнт тепловіддачі.

Варіаційне рівняння (2) за допомогою дискретизації розрахункової схеми МСЕ зведемо до системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо лінійний скінченний елемент, властивості якого визначаються теплофізичними характеристиками. Розподіл температури за об'ємом СЕ задамо у вигляді лінійного закону апроксимації:

$$T = \sum_{l=1}^{8} \phi_{(l)}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) T_{(l)}, \tag{3}$$

де $T_{(l)}$ – температура у вузлових точках СЕ;

$\phi_{(l)}\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)=\frac{1}{4}\left(1+\xi^1{}_{(l)}\xi^1\right)\left(1+\xi^2{}_{(l)}\xi^2\right)\left(1+\xi^3{}_{(l)}\xi^3\right)$ – базисні функції для апроксимації температури в межах елемента.

Вважаємо, що між шарами матеріалу виконуються умови ідеального теплового контакту. Отже, на кордоні k-го і $(k+1)$-го шару виконується умова:

$$T^{(k)+}=T^{(k+1)-},$$
$$\lambda_{33}^{(k)}T_{,3}^{(k)+}=\lambda_{33}^{(k+1)}T_{,3}^{(k+1)-}. \tag{4}$$

Для скінченних елементів, що моделюють процес поширення тепла в шаровому матеріалі, поле температур апроксимується за допомогою відповідних базисних лінійних функцій, а в напрямку, перпендикулярному границі шарів - кусково-лінійною, що забезпечує тотожність теплових потоків в напрямку спільної границі шарів [6]:

$$\phi_3^i=2-i+(-1)^i\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1}\left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1}+\frac{h_2}{\lambda_{33}^2}\right)^{-1},$$
$$\phi_3^k=2-k+(-1)^i\left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1}+\frac{\xi^3-h_1+1}{\lambda_{33}^2}\right)\left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1}+\frac{h_2}{\lambda_{33}^2}\right)^{-1},\ i,\ k=1,2.$$

Вираз (3) запишемо в матричному вигляді:

$$T=\{T\}^T\{\phi\}. \tag{5}$$

Апроксимуємо функцію температури у вигляді розкладання за степеневими функціями:

$$T=\chi^{(000)}+\chi^{(100)}\psi^{(100)}+\chi^{(010)}\psi^{(010)}+\chi^{(001)}\psi^{(001)}+\chi^{(110)}\psi^{(110)}+$$
$$+\chi^{(101)}\psi^{(101)}+\chi^{(011)}\psi^{(011)}+\chi^{(111)}\psi^{(111)}, \tag{6}$$

або

$$T=\sum_{pqr}^{111}X^{(pqr)}\psi^{(pqr)}. \tag{7}$$

Функції форми можна представити через степеневі функції:

$$\{\varphi\}=[B]\{\psi\}, \tag{8}$$

де $[B]$ – матриця перетворення.

Похідні температури за координатами обчислюються за формулами:

$$\frac{\delta T}{\partial\xi^1}=\chi^{(100)}+\chi^{(110)}\psi^{(010)}+\chi^{(101)}\psi^{(001)}+\chi^{(111)}\psi^{(011)};$$
$$\frac{\delta T}{\partial\xi^2}=\chi^{(010)}+\chi^{(110)}\psi^{(100)}+\chi^{(011)}\psi^{(001)}+\chi^{(111)}\psi^{(101)}; \tag{9}$$
$$\frac{\delta T}{\partial\xi^3}=\chi^{(001)}+\chi^{(101)}\psi^{(100)}+\chi^{(011)}\psi^{(010)}+\chi^{(111)}\psi^{(110)}.$$

Представимо вирази (8) і (9) в матричному вигляді і запишемо їх варіації:

$$\delta T=\left\{\delta\chi\right\}^T\left\{\psi\right\};\ \delta T_{,i}=\left\{\delta\chi\right\}^T\left\{\psi_{,i}\right\}. \tag{10}$$

Згідно (8) маємо:

$$T=\{T\}^T[B]\{\psi\};T_{,i}=\{T\}^T[B]\{\psi_{,i}\};$$
$$\delta T=\{\psi\}^T[B]^T\delta\{T\};T_{,i}=\{\psi_{,i}\}^T[B]^T\delta\{T\}. \quad (11)$$

Припустимо розподіл температури на поверхні скінченного елемента, що знаходиться на кордоні області, функцією:

$$T^{(st)}=\sum_{p_s=0}^{1}\sum_{q_t=0}^{1}T^{(p_sq_t)}\varphi^{(p_sq_t)}. \quad (12)$$

Температура на поверхні в матричній формі буде дорівнювати:

$$T^{(st)}=\{\psi^{(st)}\}^T[B^{(st)}]^T\{T^{(st)}\}, \quad (13)$$

$$\delta T^{(st)}=\{\psi^{(st)}\}^T[B^{(st)}]^T\delta\{T^{(st)}\}. \quad (14)$$

У такому випадку рівняння (2) приймає вигляд:

$$\delta W^T=\iiint_{-1}^{1}\delta\{T\}^T[B]\{\psi_{,i}\}\lambda_{ij}\{\psi_{,j}\}^T[B]^T\{T\}\sqrt{g}d\xi^1d\xi^2d\xi^3+$$
$$+\iiint_{-1}^{1}w_0\delta\{T\}^T[B]\{\psi\}\sqrt{g}d\xi^1d\xi^2d\xi^3+$$
$$+\iint_{-1}^{1}q\delta\{T\}^T\left[B_{s_1t_1}\right]\{\psi_{s_1t_1\cdot}\}\sqrt{g^{nn}}\epsilon_{ns_1t_1}d\xi^{s_1}d\xi^{t_1}+$$
$$+\iint_{-1}^{1}h\delta\{T\}^T\left[B_{s_2t_2}\right]\{\psi_{s_2t_2\cdot}\}\{\psi_{s_2t_2\cdot}\}^T\left[B_{s_2t_2}\right]^T\{T\}\sqrt{g^{nn}}\epsilon_{ns_2t_2}d\xi^{s_2}d\xi^{t_2}-$$
$$-\iint_{-1}^{1}h\theta\delta\{T\}^T\left[B_{s_2t_2}\right]\{\psi_{s_2t_2\cdot}\}\sqrt{g^{nn}}\epsilon_{ns_2t_2}d\xi^{s_2}d\xi^{t_2}=0,$$
$$\delta\{T\}[H]\{T\}+\delta\{T\}[H^{(s_2t_2)}]\{T\}+\delta\{T\}\{P\}+\delta\{T\}\{P\}=0, \quad (15)$$

де g – метричний тензор;

ϵ_{nts} – символ Веблена.

Матриця теплопровідності $[H]$:

$$[H]=\iiint_{-1}^{1}[B]\{\psi_{,i}\}\lambda_{ij}\{\psi_{,i}\}^T[B]^T\sqrt{g}d\xi^1d\xi^2d\xi^3. \quad (16)$$

Матриця $\left[H^{(s_2t_2)}\right]$ є доповненням до матриці $[H]$, обумовленої граничними умовами 3 роду на поверхні СЕ.

Вектор еквівалентного навантаження $\{P\}$, обумовлений внутрішнім джерелом теплоутворення, надається виразом:

$$\{P\}=\iiint_{-1}^{1}w_0[B]\{\psi\}\sqrt{g}d\xi^1d\xi^2d\xi^3. \quad (17)$$

Вектор еквівалентного навантаження $\{S\}$, обумовлений тепловими потоками і температурою на поверхні СЕ, запишемо у матричному вигляді:

$$\{S\} = \int_{1}^{1}\int q\left[B_{s_1t_1}\right]\left\{\psi_{s_1t_1}\right\}\sqrt{g^{nn}}\,\epsilon_{ns_1t_1}d\xi^{s_1}d\xi^{t_1} - \\ -\int_{1}^{1}\int h\theta\left[B_{s_2t_2}\right]\left\{\psi_{s_2t_2}\right\}\sqrt{g^{nn}}\,\epsilon_{ns_2t_2}d\xi^{s_2}d\xi^{t_2}. \tag{18}$$

Якщо вважати, що варіація функції поля (15) дорівнює нулю, то і коефіцієнти при варіаціях температур також дорівнюватимуть нулю:

$$[H]\{T\} + [H^{(s_2t_2)}]\{T\} + \{P\} + \{S\} = 0. \tag{19}$$

Тоді система розв`язувальних рівнянь стаціонарної задачі теплопровідності має вигляд:

$$[H]\{T\} = -\{R\}, \tag{20}$$

де $\{R\} = \{P\} + \{S\}$ – вектор еквівалентного навантаження.

При обчисленні матриці теплопровідності необхідно виконати перетворення тензора теплопровідності, заданого в системі координат армування анізотропного шару, в місцеву систему координат x_i за формулою [5]:

$$\lambda_{ij} = \lambda^{*}_{mn}a^{m}_{i}a^{n}_{j}, \tag{21}$$

де a^{i}_{m} – тензор повороту системи координат, який пов'язаний з тензором перетворення координат $d^{i}_{m} = \dfrac{dx_i}{d\xi_m}$ наступним співвідношенням:

$$a^{i}_{m} = \frac{d^{i}_{m}}{\sqrt{g_{mn}}}.$$

При обчисленні матриці теплопровідності для скінченних елементів з кусково-лінійним законом апроксимації переміщень по об'єму елемента для забезпечення достатньої точності необхідно процедуру інтегрування проводити для кожного шару окремо.

У такому випадку процедура формування системи розв'язувальних рівнянь для пакету шарів конструкції в цілому може бути зведена до суперелементного підходу, що є виправданим при розрахунку багатошарових конструкцій [1].

При побудові системи рівнянь для суперелементної схеми необхідно перейти до глобальної нумерації вузлів кожного шару. Після компонування отримуємо систему, що складається з $12(n+1)$ рівнянь (n – кількість шарів).

Для визначення переміщень пакету необхідно спочатку визначити переміщення на зовнішній поверхні, а саме вузлів 1, 2, 3, 4, $(4n+1)$, $(4n+2)$, $(4n+3)$, $(4n+4)$.

Поле вузлових температур можна виразити у вигляді одновимірного масиву:

$$\{T\}^{T} = \{\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \mathbf{Q}_3\}^{T},$$

$$\{Q_1\}^{T} = \{T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4\}^{T},$$

$$\{Q_2\}^{T} = \{T_5 \quad T_6 \quad \dots \quad T_{4n-1} \quad T_{4n}\}^{T},$$

$$\{Q_3\}^{T} = \{T_{4n+1} \quad T_{4n+2} \quad T_{4n+3} \quad T_{4n+4}\}^{T}.$$

Вектор еквівалентного навантаження також можна представити у вигляді сукупності векторів:

$$\begin{gathered}\{R\}^T=\{\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3\}^T\,,\\ \{P_1\}^T=\{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4\}^T\,,\\ \{P_2\}^T=\{R_5 \quad R_6 \quad \ldots \quad R_{4n-1} \quad R_{4n}\}^T\,,\\ \{P_1\}^T=\{R_{4n+1} \quad R_{4n+2} \quad R_{4n+3} \quad R_{4n+4}\}^T\,.\end{gathered} \tag{22}$$

Тоді головна система рівнянь записується наступним чином:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13}\\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23}\\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{Q}_2\\ \mathbf{Q}_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_2\\ \mathbf{P}_3\end{Bmatrix}. \tag{23}$$

Поле температур “внутрішніх” вузлів обчислюється через температуру “зовнішніх”:

$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{P}_2-\mathbf{H}_{22}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{23}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{Q}_3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H_{11}Q_1+H_{12}H_{22}^{-1}}\left(\mathbf{P_2-H_{22}^{-1}}\begin{bmatrix}\mathbf{H_{21}} & \mathbf{H_{23}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q_1}\\ \mathbf{Q_3}\end{Bmatrix}\right)\mathbf{+H_{13}Q_3=P_1;}\\ \mathbf{H_{31}Q_1+H_{32}H_{22}^{-1}}\left(\mathbf{P_2-H_{22}^{-1}}\begin{bmatrix}\mathbf{H_{21}} & \mathbf{H_{23}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q_1}\\ \mathbf{Q_3}\end{Bmatrix}\right)\mathbf{+H_{33}Q_3=P_3}.\end{gathered} \tag{24}$$

Таким чином отримуємо систему рівнянь для скінченного суперелемента:

$$[\tilde{H}]\{Q\}=\{F\}\,, \tag{25}$$

де $[\tilde{H}]=\left(\begin{bmatrix}\mathbf{H_{11}} & \mathbf{H_{13}}\\ \mathbf{H_{31}} & \mathbf{H_{33}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{H_{12}G}\\ \mathbf{H_{32}G}\end{bmatrix}\right)$ – матриця теплопровідності суперелемента;

$\mathbf{G=H_{22}^{-1}}\begin{bmatrix}\mathbf{H_{21}} & \mathbf{H_{23}}\end{bmatrix}$;

$\{Q\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{Q_1}\\ \mathbf{Q_3}\end{Bmatrix}$ – вектор вузлових температур на зовнішніх гранях суперелемента;

$\{F\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_3\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mathbf{K}_{12}\mathbf{S}\\ \mathbf{K}_{32}\mathbf{S}\end{Bmatrix}$ – вектор еквівалентного навантаження на зовнішніх гранях суперелемента, $\mathbf{S=H_{22}^{-1}P_2}$.

Процедуру обернення матриці, враховуючи її симетричність, можна виконати за методом Халецького.

Зв’язана задача термопружності в загальному випадку формулюється для динамічного навантаження. В цьому випадку процес поширення тепла залежить від часу, тобто виникає необхідність вирішувати задачу нестаціонарної теплопровідності. Застосування аналітичних методів для таких завдань пов’язано з певними труднощами, зумовлені різними причинами, наприклад, досить складною геометричною формою конструктивного елементу або складним характером теплового навантаження.

Для обґрунтування достовірності запропонованого підходу розглянемо розв'язання задач стаціонарної теплопровідності для шаруватих конструкцій.

Задача 1. Розглянемо розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності тришарової панелі. Панель прямокутна: розміри панелі $a_1 = 3{,}5$ м, $a_2 = 2{,}9$ м, $a_3 = 0{,}35$ м. Матеріал шарів ізотропний. Товщина шарів $h^{(k)} = 0{,}17;\ 0{,}1;\ 0{,}08$ м. Конструкція являє собою стінову панель житлового будинку. Температура середовища на зовнішній поверхні $\theta_1 = 318$ K, на внутрішній поверхні $\theta_2 = 293$ K. Коефіцієнти теплообміну на зовнішній і внутрішній поверхнях $h_1 = 8{,}7$ Вт/(м^2·K), $h_2 = 23$ Вт/(м^2·K) відповідно. Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_{11}^{(k)} = \lambda_{22}^{(k)} = \lambda_{33}^{(k)} = 0{,}52;\ 0{,}12;\ 0{,}52$. Бічні поверхні панелі теплоізольовані. Результати розрахунку при різних сітках скінченних елементів представлено в табл. 1 і на рис. 1, рис. 2.

Таблиця 1 – Температура на поверхнях тришарової панелі

Координати точок поверхні	0,1a_1; 0,1a_2	0,2a_1; 0,2a_2	0,3a_1; 0,3a_2	0,4a_1; 0,4a_2	0,5a_1; 0,5a_2
Температура на поверхні панелі МССЕ (4×11×11)	293,82 313,41	295,43 316,87	295,48 317,05	295,49 317,06	29,49 317,06
МССЕ (2×16×16)	294,13 316,73	295,41 317,01	295,48 317,06	295,49 317,06	296,49 317,06
МССЕ (2×21×21)	294,17 316,74	295,41 317,04	295,49 317,06	295,49 317,06	296,49 317,06
Розв'язок [8] (сітка 40×40)	294,4 317,0	294,9 317,2	294,9 317,3	294,9 317,3	294,9 317,3
Розв'язок [1]	291,69 316,06	294,29 317,28	294,65 317,35	294,70 317,35	294,71 317,35

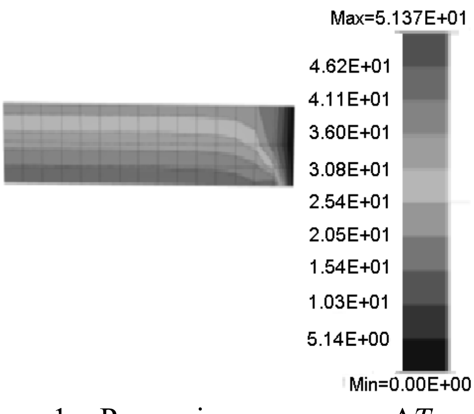

Рисунок 1 – Розподіл температур ΔT при сітці 4×16×16

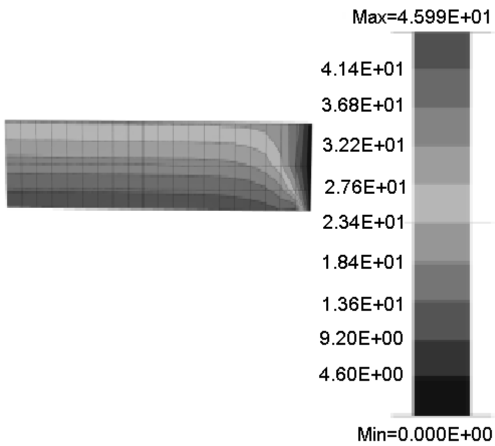

Рисунок 2 – Розподіл температур ΔT при сітці 4×21×21

Результати задовільно збігаються з аналітичним розв'язком, наведеними в роботах [1, 8], отриманими на основі двовимірної моделі. Перевірка збіжності результатів проведена при різних сітках скінченних елементів. При збільшенні числа скінченних елементів спостерігається стійка збіжність результатів, що свідчить про достовірність отриманих рішень.

Задача 2. П'ятишарова трапецієподібна панель під дією теплового навантаження [3]. Розміри плити в плані: $a = 150$ см, $b = 81$ см, $c = 15$ см. До верхньої поверхні $x_3 = 12$ мм підводиться теплової потік $q^+ = 2{,}24$ кВт/м^2. На нижній поверхні ($x_3 = 0$) і бічних гранях панелі –2-3, 3-4, 1-4 має місце конвективний теплообмін з навколишнім середовищем ($\theta = 153$ К), грань 1-2 теплоізольована. Шари 2, 4 – трансверсально-ізотропні, а 1, 3, 5 – ортотропні. Головні осі ортотропії шарів 1, 3, 5 розташовані під кутом 30° до прийнятої системі координат, отже, в системах координат, зв'язаних з напрямками ортотропії, характеристики матеріалу шару відповідають випадку прямолінійної анізотропії.

Теплофізичні характеристики пакета шарів ($k = 1…5$) наступні:

$$\lambda_{11}^{(k)} = 0{,}12;\ 16{,}24;\ 0{,}12;\ 16{,}24;\ 0{,}12 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\lambda_{22}^{(k)} = 0{,}54;\ 16{,}24;\ 0{,}54;\ 16{,}24;\ 0{,}54 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\lambda_{33}^{(k)} = 0{,}048;\ 0{,}83;\ 0{,}048;\ 0{,}83;\ 0{,}048 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\lambda_{12}^{(k)} = \lambda_{21}^{(k)} = 0{,}1785;\ 0;\ 0{,}1785;\ 0;\ 0{,}1785 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Коефіцієнти теплообміну по бічних гранях $h_б^{(k)} = 1500;\ 1700;\ 1500;\ 1700;$ 1500 Вт/(м·К). На нижній поверхні $h^- = 1500$ Вт/(м·К). Розподіл температури на поверхні $x_3 = 12$ мм представлено ізотермами на рис. 3.

Таким чином, запропонований підхід до побудови матриці теплопровідності шаруватих елементів конструкцій у тривимірній постановці дозволяє отримати результати з достатньою точністю.

Висновки. В роботі досліджено методику розв'язання задач теплопровідності для анізотропних матеріалів, описано розподіл температур і процесів теплопровідності композиційних елементів, який здійснюється за допомогою співвідношень, що враховують специфічні особливості анізотропних матеріалів.

На основі суперелементного підходу побудовано розв'язувальні рівняння для моделювання процесу теплопровідності в шаруватих конструкціях.

Запропонована методика є універсальною і має ряд особливостей, серед яких можні виділити наступні:

- незалежність порядку дозвільних рівнянь від структури пакета шарів, що створює зручності для реалізації чисельними методами;
- можливість введення відповідних значень теплофізичних характеристик. Компоненти тензора теплопровідності задаються відповідно до виду анізотропії композиту в системі армування;

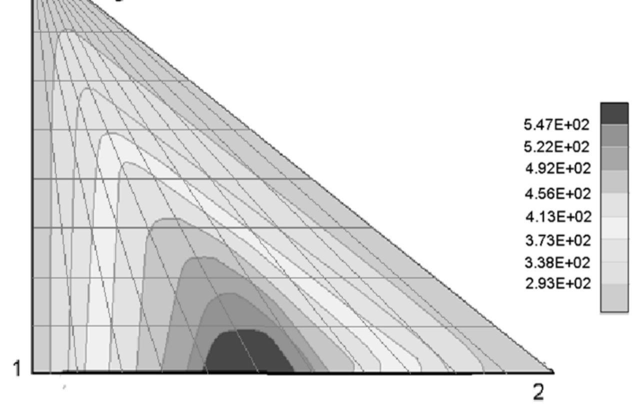

Рисунок 3 – Розподіл температур на поверхні плити

- можливість використання тривимірних скінченних елементів при моделюванні термопружного поведінки реальних конструкцій довільної форми.

Відмінності і переваги такого підходу порівняно із відомими методиками полягають у наступному:

- можливість урахування впливу теплофізичних характеристик на розподіл температури поля по товщині пакета;
- зручна для реалізації форму подання розв'язувальних рівнянь на основі МСЕ;
- тривимірна постановка задачі;
- можливості розрахунку конструкції складної геометричної форми.

Застосування запропонованої методики дозволяє вирішувати задачі теплопровідності для шаруватих анізотропних конструкцій. При цьому можна уникнути використання спрощуючих гіпотез, які зводять тривимірну задачу до двовимірної постановки і призводять до доволі суттєвих обмежень і похибок, зокрема пов'язаних із урахуванням граничних умов.

Всі результати, отримані на основі запропонованого підходу, демонструють збіжність при поступовому збільшенні скінченно-елементної моделі, задовільно збігаються з експериментальними даними і розв'язаннями інших авторів, що свідчить про високий рівень їх достовірності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Козуб Ю.Г., Солодей І.І. Використання МССЕ для обчислення термопружного стану пневматичних шин. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. Вип. 102. С. 232-242.
   DOI: https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.232-242
2. Бурцев Г.Г., Чибиряков В.К. Численное исследование термоупругого состояния толстых неоднородных плит. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1987. Вып. 51. С. 63-67.
3. Василенко А.Т., Судавцова Г.К. Напряженное состояние термочувствительных толстостенных цилиндров из анизотропных композитов. *Механика композитных материалов.* 1999. Т. 35, №3. С. 367-374.
   DOI: https://doi.org/10.1007/BF02257257
4. Карнаухов В.Г., Сенченко И.И., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. К.: Наукова думка, 1985. 288 с.
5. Киричевский В.В., Козуб Г.А. Матрица теплопроводности конечного элемента для решения задач термоупругости слоистых композитов. *Геотехническая механика*. 2006. Вып. 63. С. 172-177.
6. Kozub Yu., Kozub G. Calculation of the longevity of elestomeric structural elements. *TEKA, Commision of Motorization and Energetics in Agriculture.* 2016. Vol. 16, No. 2. P. 9-14.
7. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. К.: Наукова думка, 2005. 402 с.
8. Сипетов В.С., Демчук О.Н. Решение в уточненной постановке задачи термоупругости слоистых пластин. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1989. Вып. 29. С. 25-29.
9. Сипетов В.С., Демчук О.Н., Стародуб Р.А. Решение нестационарных задач термоупругого деформирования слоистых композитных конструкций методом конечных элементов. *Механика композитных материалов.* 1991. №2. С. 215-222.
   DOI: https://doi.org/10.1007/BF00614728
10. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов / Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 196 с.

REFERENCES

1. Kozub, Yu.G. and Solodei, I.I. (2019), "Application of the finite element method for calculating the thermal stress state of pneumatice tires", *Strength of Materials and the Theory of Structures*, no. 102, pp. 232-242.
   DOI: https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.232-242
2. Burtsev, G.G. and Chibiryakov, V.K. (1987), "Numerical research of the thermoelastic state of thick inhomogeneous plates", *Strength of Materials and the Theory of Structures*, no. 51, pp. 63-67.
3. Vasilenko, A.T. and Sudavtsova, G.K. (1999), "The stress state of heat-sensitive thick-walled cylinders of anisotropic composites", *Mechanics of composite materials,* vol. 35, no. 3, pp. 367-374.
   DOI: https://doi.org/10.1007/BF02257257
4. Karnaukhov, V.G, Senchenko, I.I. and Gumenyuk, B.P. (1985), *Termomehanicheskoye povedenie vyazkouprugih tel pri garmonicheskom nagruzgenii* [Thermomechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading], Naukova dumka, Kyiv,

USSR.
5. Kirichevskii, V.V. and Kozub, G.A. (2006), "Finite Element Thermal Conductivity Matrix for Solving Thermoelasticity Problems of Layered Composites", *Geo-Technical Mechanics*, no. 63, pp. 172-177.
6. Kozub, Yu. and Kozub, G. (2009), "Calculation of the longevity of elestomeric structural elements", *TEKA. Commision of Motorization and Energetics in Agriculture,* vol. 16, no. 2, pp. 9-14.
7. Kirichevskii, V.V., Dokhnyak, B.V., Kozub, Yu.G., Gomeniuk, S.I., Kirichevskii, R.V. and Hrebeniuk, S.N. (2005), *Metod konechnykh èlementov v vychislitelnom komplekse «MÌRELA+»* [Finite Element Method in obtained complex "MIRELA+"], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
8. Sipetov, V.S. and Demchuk, O.N. (1989), "Solution of a thermoelasticity problem for layered plates according to a more precise model", *Mathematical methods and physical and mechanical fields*, no. 29, pp. 25-29.
9. Sipetov, V.S., Demchuk, O.N. and Starodub, R.A. (1991), "Solution of nonsteady problems of the thermo-elastic deformation of composite laminates by the finite elements method", *Mechanics of Composite Materials*, no. 27, pp. 138-144.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF00614728
10. Kaledin, V.O., Aulchenko, S.M., Mitkevich, A.B., Reshetnikova, E.V., Sedova, E.A. and Shpakova, Yu.V. (2014), *Modelirovanie statiki I dinaviki obolochechnykh konctruktsii iz komositsionnykh materialov* [Modeling the statics and dynamics of shell structures made of composite materials], FIZMATLIT, Moscow, Russia.

Про авторів

Козуб Галина Олександрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та систем, Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Старобільськ, Україна, galina14kz@gmail.com

Козуб Юрій Гордійович, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фізико-технічних систем та інформатики, Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Старобільськ, Україна, kosub.yg@gmail.com

About the authors

Kozub Halyna Oleksandrivna, Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Associate Professor Department of Information Technology and Systems, Luhansk Taras Shevchenko national university, Starobilsk, Ukraine, galina14kz@gmail.com

Kozub Yurii Hordiiovych, Doctor of Technical Science (D.Sc.), Associate Professor, Head of Department of Physical-Technical Systems and Informatics, Luhansk Taras Shevchenko national university, Starobilsk, Ukraine, kosub.yg@gmail.com

Аннотация. Приведена общая процедура исследования тепловых процессов в слоистых конструкциях с учётом всех возможных граничных условий подвода тепла. Построено модифицированную конечно-элементную модель распространения тепла в слоистом твёрдом теле с учётом анизотропии свойств композитного материала. На основе гипотезы о неразрывности полей температур и тепловых потоков на границе слоёв конструкции построены решающие уравнения метода конечных элементов. Для снижения размерности задачи теплопроводности слоистых конструкций используется суперэлементный подход. Для пакета слоёв решающие уравнения построены с помощью конденсации системы уравнений совокупности конечных элементов, входящих в пакет. На первом этапе решается задача определения распределения температуры по поверхности пакета слоёв. На следующем этапе определяется температура во внутренних узлах пакета. Предложенный подход является универсальным и имеет ряд особенностей, среди которых можно выделить следующее: порядок решающих уравнений для пакета определяется только количеством внешних узлов и не зависит от структуры пакета слоёв. Теплофизические характеристики слоёв задаются в каждом элементе пакета в системе координат анизотропии и определяют особенности матрицы теплопроводности всего пакета. Такой подход в отличие от других методик позволяет учитывать влияние теплофизических характеристик на распределение температуры поля по толщине пакета, имеет удобную для реализации форму представления решающих уравнений на основе МКЭ в трёхмерной постановке. Применение предложенной методики позволяет решать задачи теплопроводности для слоистых анизотропных конструкций любой формы. При этом можно избежать использования упрощённых двумерных постановок задачи, которые приводят к довольно существенным ограничениям и погрешностям, в частности связанных с учётом граничных условий. На основе предложенного подхода получены решения задач теплопроводности слоистых анизотропных тел. Результаты удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными и решениями других авторов, свидетельствует о достоверности методики.

Ключевые слова: метод конечных элементов, теплопроводность, многослойный элемент конструкции, суперэлемент

Abstract. The general procedure of research of thermal processes in layered designs taking into account all possible boundary conditions of heat supply is given. A modified finite-element model of heat distribution in a layered solid body is constructed taking into account the anisotropy of the properties of the composite material. Based on the hypothesis of continuity of temperature fields and heat fluxes at the boundary of the structural layers, the solution equations of the finite element method are constructed. A superelement approach is used to reduce the dimension of the thermal conductivity problem of layered structures. For a layer package, the solving equations are constructed using the condensation procedure of a system of equations of the set of finite elements included in the package. The first step is to determine the temperature distribution on the surface of the package of layers. The next step is to determine the temperature in the internal nodes of the package. The proposed approach is universal and has a number of features, among which the following can be distinguished: the order of solving equations for a package is determined only by the number of external nodes and does not depend on the structure of the layer. The thermophysical characteristics of the layers are set in each element of the package in the anisotropy coordinate system and determine the features of the thermal conductivity matrix of the whole package. This approach, in contrast to other methods, allows to take into account the influence of thermophysical characteristics on the distribution of field temperature over the thickness of the package, has a convenient form of representation of solving equations based on ITU in three-dimensional formulation. The application of the proposed technique allows to solve the problems of thermal conductivity for layered anisotropic structures of any shape. This avoids the use of simplified two-dimensional problem statements, which lead to quite significant limitations and errors, in particular those related to the boundary conditions. Based on the proposed approach, solutions of the thermal conductivity problems of layered anisotropic bodies are obtained. The results are satisfactorily consistent with the experimental data and solutions of other authors, which indicates the reliability of the method.

Keywords: finite element method, thermal conductivity, multilayered structural element, superelement

Статья поступила в редакцию 11.02.2020
Рекомендовано к печати д-ром техн. наук В.И. Дырдой